模块二 圆与方程

第 1 节 圆的方程（★☆）

强化训练

1．（2022・广州三模・★）设甲：实数 $a<3$；乙：方程 $x^2+y^2-x+3y+a=0$ 是圆，则甲是乙的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

答案：B

解析：方程 $x^2+y^2-x+3y+a=0$ 表示圆 $\Leftrightarrow (-1)^2+3^2-4a>0 \Leftrightarrow a<\frac{5}{2}$，所以乙：$a<\frac{5}{2}$，

因为 $a<3 \not\Rightarrow a<\frac{5}{2}$，所以甲不是乙的充分条件，又 $a<\frac{5}{2} \Rightarrow a<3$，所以甲是乙的必要条件，故选 B.

2．（2022・陕西西安模拟・★）已知 $a\in\mathbf{R}$，方程 $a^2x^2+(a+2)y^2+2x+8y+5a=0$ 表示圆，则圆心坐标是_____.

答案：$(-1,-4)$

解析：圆的一般式方程中 x^2 和 y^2 的系数相等，所以 $a^2=a+2$，解得：$a=2$ 或 -1，

注意 x^2 和 y^2 的系数相等只是该方程表示圆的必要条件，所以还需代回去检验，

当 $a=2$ 时，代回原方程可得 $4x^2+4y^2+2x+8y+10=0$，化简得：$x^2+y^2+\frac{1}{2}x+2y+\frac{5}{2}=0$，

因为 $(\frac{1}{2})^2+2^2-4\times\frac{5}{2}<0$，所以该方程不表示任何图形，不合题意；

当 $a=-1$ 时，原方程即为 $x^2+y^2+2x+8y-5=0$，化为标准方程可得：$(x+1)^2+(y+4)^2=22$，

此方程表示圆，圆心为 $(-1,-4)$.

3．（2022・河南模拟・★★）已知点 $A(1,2)$ 在圆 $C:x^2+y^2+mx-2y+2=0$ 外，则实数 m 的取值范围是（　　）

（A）$(-3,-2)\cup(2,+\infty)$　（B）$(-3,-2)\cup(3,+\infty)$　（C）$(-2,+\infty)$　（D）$(-3,+\infty)$

答案：A

解析：点 $A(1,2)$ 在圆 C 外 $\Rightarrow 1^2+2^2+m-2\times2+2>0$，解得：$m>-3$ ①，

还需考虑圆 C 的方程本身对 m 的限制，方程 $x^2+y^2+mx-2y+2=0$ 表示圆，应有 $m^2+(-2)^2-4\times2>0$，

解得：$m<-2$ 或 $m>2$，结合①可得 $m\in(-3,-2)\cup(2,+\infty)$.

4．（2022・全国乙卷・★）过四点 $(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，$(4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为_____.

答案：$(x-2)^2+(y-1)^2=5$（答案不唯一，填一个即可，详见解析）

解法 1：任选三点，设圆的一般式方程，把三点的坐标代入，都可用待定系数法求得圆的方程，

若选 $(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，设过该三点的圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

将上述三点的坐标代入可得$\begin{cases}F=0\\16+4D+F=0\\2-D+E+F=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}D=-4\\E=-6\\F=0\end{cases}$，

故过上述三点的圆的方程为$x^2+y^2-4x-6y=0$；

同理，若选$(0,0)$，$(4,0)$，$(4,2)$，则可求得圆的方程为$x^2+y^2-4x-2y=0$；

若选$(0,0)$，$(-1,1)$，$(4,2)$，则可求得圆的方程为$x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}y=0$；

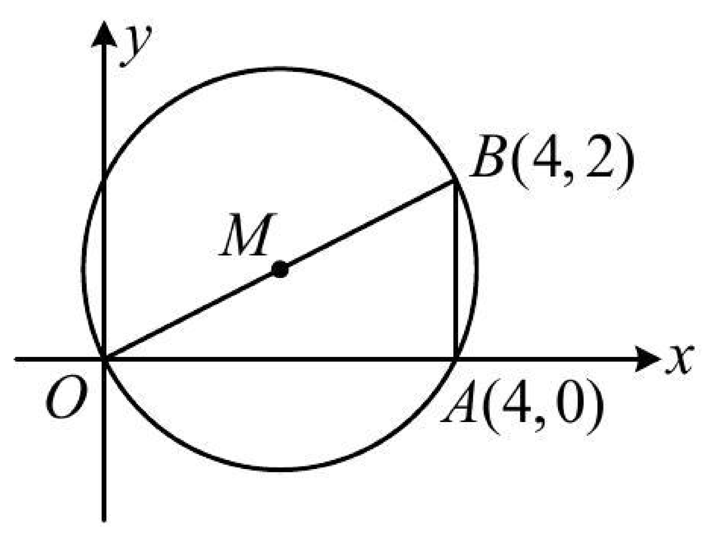
若选$(4,0)$，$(-1,1)$，$(4,2)$，则可求得圆的方程为$x^2+y^2-\frac{16}{5}x-2y-\frac{16}{5}=0$.

解法 2：观察所给的点，看能否选择三点，快速找到圆心和半径，

如图，记$O(0,0)$，$A(4,0)$，$B(4,2)$，则$AB\perp OA$，

所以过 O，A，B 三点的圆即为以 OB 为直径的圆，该圆的方程易于计算，于是就选这三点，

圆心为 OB 中点$M(2,1)$，半径$r=|OM|=\sqrt{5}$，故该圆的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=5$.



5.（2023·河南郑州模拟·★★）已知点$A(-2,1)$，$B(-1,0)$，$C(2,3)$，$D(a,2)$四点共圆，则点 D 到坐标原点 O 的距离$|OD|=$_____.

答案：3

解析：A，B，C 的坐标已知，故可先由这三点在圆上，求出圆的方程，再将点 D 代入求 a，

设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，将 A，B，C 三点代入可得$\begin{cases}5-2D+E+F=0\\1-D+F=0\\13+2D+3E+F=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}D=0\\E=-4\\F=-1\end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-4y-1=0$，因为点$D(a,2)$在圆上，所以$a^2+4-8-1=0$，故$a^2=5$，

所以$|OD|=\sqrt{a^2+2^2}=3$.

6.（★★）过点$A(1,-1)$，$B(-1,1)$，且圆心在直线$x+y-2=0$上的圆的方程为_____.

答案：$(x-1)^2+(y-1)^2=4$

解法 1：圆过 A，B 两点，则圆心在弦 AB 的中垂线上，可将其与直线$x+y-2=0$联立求圆心，

由题意，AB 中点为$O(0,0)$，$k_{AB}=\frac{-1-1}{1-(-1)}=-1$，所以 AB 中垂线的斜率为 1，其方程为$y=x$，

联立$\begin{cases}y=x\\x+y-2=0\end{cases}$解得：$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，所以圆心为$C(1,1)$，半径$r=|CA|=2$，

故所求圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

解法 2：也可直接设圆心 C 的坐标，并由 $|CA|=|CB|$ 求解该坐标，

$x+y-2=0 \Rightarrow y=2-x$，由题意，圆心在直线 $y=2-x$ 上，故可设圆心为 $C(a,2-a)$，设半径为 r，

因为圆 C 过 A，B 两点，所以 $|CA|=|CB|=r$，故 $\sqrt{(a-1)^2+(2-a+1)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(2-a-1)^2}$，解得：$a=1$，

所以 $C(1,1)$，半径 $r=|CA|=2$，故所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

7．（2023 • 河南模拟改 • ★★）过 $P(-2,-1)$ 且与两坐标轴都相切的圆的方程为_____.

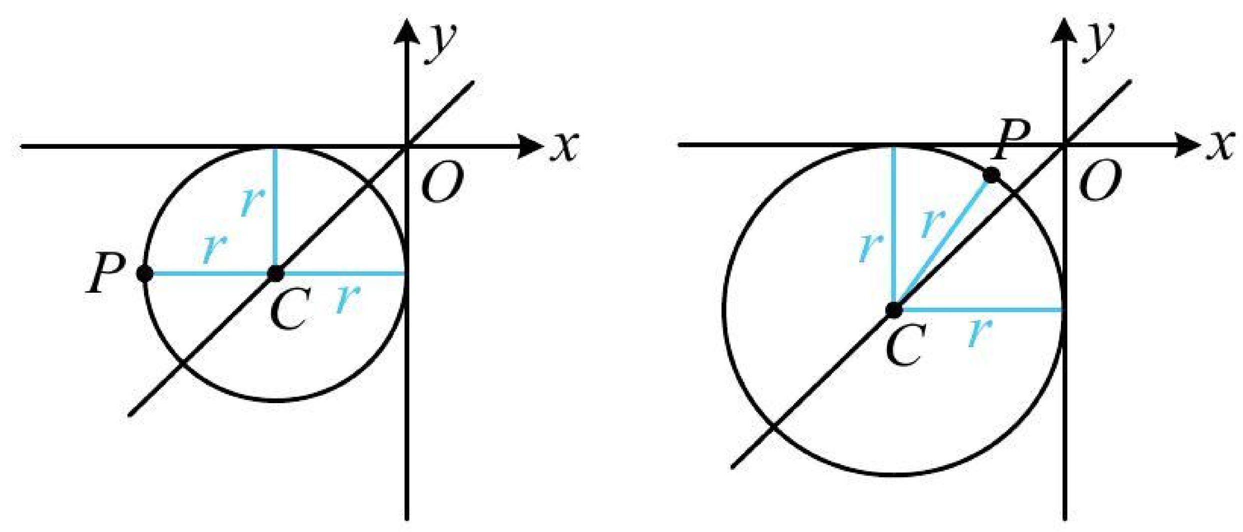
答案：$(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 或 $(x+5)^2+(y+5)^2=25$

解析：如图，过点 P 且与两坐标轴都相切的圆，圆心在第三象限且在直线 $y=x$ 上，

故可设圆心坐标，利用圆心到任意一条坐标轴的距离与到点 P 的距离相等建立方程求圆心，

由图知可设圆心为 $C(-r,-r)(r>0)$，则由题意，$r=\sqrt{(-r+2)^2+(-r+1)^2}$，解得：$r=1$ 或 5，

所以圆 C 的方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 或 $(x+5)^2+(y+5)^2=25$.



8．（★★）已知点 $B(1,0)$，直线 $l:x=-1$，点 C 在 l 上，以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切于点 A，若 $\angle BAC=120^\circ$，则圆的方程为_____.

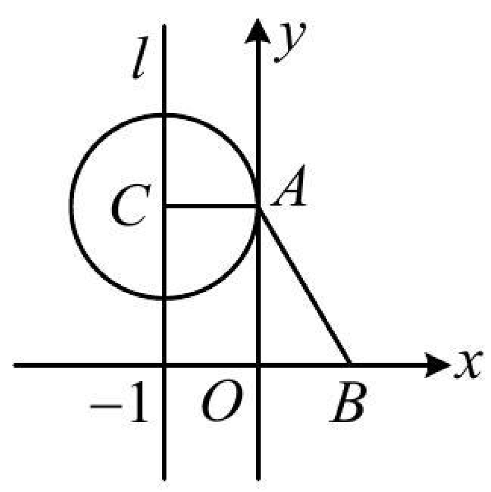
答案：$(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$

解析：如图，点 C 在 l 上，故其横坐标为 -1，又圆 C 与 y 轴相切，所以圆 C 的半径为 1，

故只差圆心 C 的纵坐标了，由图可知 C 的纵坐标等于 $|OA|$，可在 ΔAOB 中计算 $|OA|$，找到圆心，

由题意，$AC\perp y$ 轴，所以 $AC /\!/ x$ 轴，又 $\angle BAC=120^\circ$，所以 $\angle ABO=60^\circ$，故 $|OA|=|OB|\cdot\tan\angle ABO=\sqrt{3}$，

所以 $C(-1,\sqrt{3})$，故圆 C 的方程为 $(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$.



9．（2022 • 浙江模拟 • ★★★）在平面直角坐标系中，第一象限内的点 A 在直线 $l:y=2x$ 上，$B(5,0)$，以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 的另一个交点为 D，若 $AB\perp CD$，则圆 C 的方程为_____.

答案：$(x-4)^2+(y-3)^2=10$

解析：如图，因为 AB 是直径，所以 $AD\perp BD$，

由这一垂直关系，结合已知 l 的斜率，可求得 BD 的斜率，B 又已知，故可求得点 D 的坐标，

由题意，直线 AD 的斜率为 2，所以直线 BD 的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$，

设 $D(a,2a)$，则 $k_{BD}=\dfrac{2a}{a-5}=-\dfrac{1}{2}$，解得：$a=1$，所以 $D(1,2)$，

再求圆心 C，C 是 AB 中点，故可设 A 的坐标，利用 $AB\perp CD$ 来建立方程求解，

设 $A(b,2b)$，则 $C(\dfrac{b+5}{2},b)$，因为 $AB\perp CD$，所以 $k_{AB}\cdot k_{CD}=\dfrac{2b}{b-5}\cdot\dfrac{b-2}{\dfrac{b+5}{2}-1}=-1$，解得：$b=3$ 或 -1，

因为 A 在第一象限，所以 $b>0$，从而 $b=3$，故 $C(4,3)$，$|CD|=\sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$，

所以圆 C 的方程为 $(x-4)^2+(y-3)^2=10$.